



تاریخ:
شماره:
پیوست:
شماره صفحه:

(B)

۱۹۲۵۶۱۸	ریاضی ۱	
	آزادی - مهر داد	
	نهایی -	

۳	۸۸/۰۶/۰۸ - ۰۸:۳۰	
نظری		
	دقی	
	بابه	
	بابه، تئوری	

نمره برگه آزمون:	نمره تحقیق:	نمره فعالیت کلاسی:	نمره میان ترم:	مدت زمان آزمون: ۲ ساعت
------------------	-------------	--------------------	----------------	------------------------

بازم

۱. ریشه های چهارم $z = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \right)^{1/4}$ را محاسبه کنید. (۲ نمره)

۲. قضیه مقدار میانگین در مشتق را بیان و اثبات کنید. (۲ نمره)

۳. با فرض اینکه تابع $f(x)$ در R پیوسته و غیر صفر باشد، ضابطه تابع f را از معادله زیر بدست آورید:

$$(f(x))^2 = \int_1^x f(\sqrt{t}) \tan^{-1}(\sqrt{t}) dt, \quad (x > 0)$$

(۲ نمره)

۴. هر یک از حدهای زیر را محاسبه کنید: (۳ نمره)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{2n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n^2}{(n+n)^2} \right) \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x \quad (\text{الف})$$

۵. انتگرالهای زیر را حساب کنید: (۳ نمره)

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (\text{ب}) \quad \int (Arc \sin x)^2 dx \quad (\text{الف})$$

۶. همگرایی یا واگرایی $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} dx$ را بررسی کنید. (۲ نمره)

۷. مطلوبیت محاسبه طول قوس منحنی $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ در فاصله $[0, \frac{\pi}{4}]$. (۲ نمره)

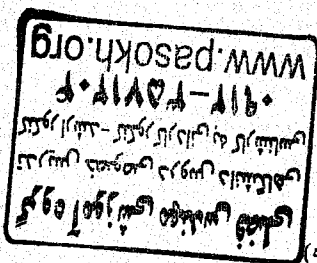
۸. شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n x^n$ را تعیین نموده و در نقاط انتهایی بازه همگرایی، رفتار سری را

بررسی کنید. (۲ نمره)

۹. الف) بسط ماکلورن تابع $f(x) = \sinh x$ را بیابید. (۲ نمره)

(موفق باشید)

ب) مقدار $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$ را بدست آورید.



تاریخ:
شماره:
پوست:
شماره صفحه:

باسمه تعالی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
برگه طرح سؤال



(A)

کلاس درس	۱۹۲۵۶۱۸	نام دانشجو	ریاضی ۱
شماره اول	۸۸	نام خانوادگی	د. فنی
شماره دوم	---	نام پدر	پایه
شماره سوم	۳	نام مادر	پایه تئوری
نظری		شماره ثبت نام	۸۸/۱۰/۲۶-۱۶:۰۰

نمره برگه آزمون:	نمره تحقیق:	نمره فعالیت کلاسی:	نمره میان ترم:	مدت زمان آزمون: ۷۰ دقیقه
------------------	-------------	--------------------	----------------	--------------------------

۱- ناحیه $Re(\frac{1}{z}) > 1$ چه قسمتی از صفحه مختلط را نشان می دهد؟ (با رسم شکل)

۲- ثابت کنید اگر $x \geq 0$ آنگاه $\ln(1+x^2) \leq x$.

۳- حدود زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos \sqrt{x}}$

(ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2})$

۴- انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\int x \sinh^{-1} x dx$ (ب) $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$ (ج) $\int \frac{2x^2 + 7}{(x+1)(x^2+4)} dx$

۵- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ و سهمی $2y^2 = 2x$ حول محور y را بیابید.

۶- همگرایی یا واگرایی سری و انتگرال زیر را تعیین کنید:

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (ب) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$

۷- شعاع همگرایی و فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n 2^n}$ را بدست آورید.

۸- سری مکلورن تابع $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ را بنویسید و به کمک آن مقدار $f^{(10)}(0)$ را بدست آورید.

۹- (الف) نمودار تابع $r^2 = \cos^2 \theta$ را رسم کنید.
(ب) مساحت سطح محصور توسط نمودار قسمت (الف) را محاسبه کنید.

موفق باشید
گروه علوم پایه

گروه آموزشی مهندسی فضلی
تدریس خصوصی دروس دانشگاهی
کنکور ارشد - کنکور کاردانی به کارشناسی
۰۹۱۲-۳۵۷۱۲۰۴
www.pasokh.org

۱- ناحیه $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$ چه قسمتی از صفحه مختلط را نشان می دهد؟ (با رسم شکل)

اگر $z = x + iy$ آنگاه $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$ و بنابراین ناحیه مورد نظر عبارت است از

مجموعه نقاط (x, y) در صفحه که به ازای آن ها داشته باشیم: $\frac{x}{x^2+y^2} > 1$. اگر با جابجا کردن عبارات

نابرابری را به شکل $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ بنویسیم ناحیه مورد نظر که دایره به مرکز $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ و به شعاع یک

دوم است، معین می شود.

۲- ثابت کنید اگر $x > 0$ آنگاه $\ln(1+x^2) < x$.

آ- تابع $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ را تشکیل می دهیم. خواهیم داشت: $f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2}$. با توجه به رابطه:

$$(1-x)^2 > 0 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} < 1$$

در می یابیم که به ازای $x > 0$ داریم $f'(x) > 0$ و بنابراین تابع روی $(0, \infty)$ صعودی است و نقطه $x = 0$

یک نقطه مینیمم تابع است و $f(0) = 0$ بنابراین به ازای هر $x > 0$ داریم $f(x) > 0$ یعنی $\ln(1+x^2) < x$.

ب- می توانیم از قضیه مقدار میانگین با تابع $f(x) = \ln(1+x^2)$ هم برای اثبات رابطه بهره بگیریم.

$$\frac{\ln(1+c^2) - \ln(1+0^2)}{c-0} = \frac{2c}{1+c^2} \quad 0 < c < x$$

با توجه به رابطه $1 - \frac{2c}{1+c^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2c}{1+c^2} \leq 1$ رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\ln(1+c^2)}{c} = \frac{2c}{1+c^2} \leq 1 \Rightarrow \ln(1+c^2) \leq c$$

که تساوی تنها برای حالت $c = 1$ است که هیچگاه پیش نمی آید (چرا؟).

۳- حدود زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}}$$

برای محاسبه این حد قرار می دهیم: $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}}$. با توجه به اینکه این حد در صورت وجود عددی

مثبت خواهد بود. لگاریتم حد را محاسبه می کنیم:

$$\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos \sqrt{x}}{3}$$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

در اینجا با بهره گیری از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

بنابراین:

$$\text{ب: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{2n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n^2}{(n+n)^2} \right)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} \text{ نیر همگراست.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{p-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

از سوی دیگر داریم:

به ازای $p = \frac{1}{2}$ حد بالا به سمت یک میل می کند. با توجه به اینکه $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ نیز

همگراست. بنابراین $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ به عنوان حاصل جمع دو انتگرال همگرا، همگراست.

۷- شعاع و فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n^n}$ را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^n}{(-1)^n (x-1)^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+2}} |x-1| = |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= |x-1| e^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه بازه همگرایی سری کل اعداد حقیقی است.

نکته: اگر سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n n}$ خوانده شده باشد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)} \cdot \frac{2^n n}{(-1)^n (x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x-1| = \frac{|x-1|}{2}$$

در این صورت با $|x-1| < 2$ بازه همگرایی به شکل $(-1, 3)$ به دست می آید. با $x = 3$ سری به شکل

در می آید که یک سری متناوب با جمله عمومی نزولی و همگراست. در $x = -1$ سری به شکل

در می آید که به وضوح واگراست. بنابراین بازه همگرایی سری $(-1, 3]$ خواهد بود.

گروه آموزشی مهندسی فضلی
تدریس خصوصی دروس دانشگاهی
کنکور ارشد - کنکور کارشناسی به کارشناسی
۰۹۱۲-۳۵۷۱۲۰۴
www.pasokh.org