(31) $L\{y\} = Y$, $L\{y'\} = sY - y(0) = sY$ $\quad L\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$

$L\{y''\} = s^2Y - 1$

$L\{ty'\} = -F' = -Y'_{(s)} = -[Y + sY']$, $L\{t^2y''\} = +(s^2Y-1)''$

$L\{t^2y''\} = [s^2Y' + 2sY]' = [s^2Y'' + 2sY' + 2sY' + 2Y]$

$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0 \longrightarrow y'' - [t^2y']' + 2y = 0$

$y'' - t^2y'' - 2ty' + 2y = 0$ $\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}}$

$(s^2Y - 1) - [s^2Y'' + 4sY' + 2Y] + 2[Y + sY'] + 2Y = 0$

$$\boxed{s^2Y'' + 2sY' - (s^2+2)Y = -1}$$

گزینه ۲

(32) $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ $\quad t = e^{2u-2} \longrightarrow dt = 2e^{2u-2}du$

$Li(e^{2u-2}) = \int \frac{2e^{2u-2}}{2u-2} = \int \frac{e^{2u} \cdot e^{-2}}{u-1} du = \frac{1}{e^2}\int \frac{e^{2u}}{u-1}$

$\int \frac{e^{2u}}{u-1} du = e^2 \, Li(e^{2u-2})$

گزینه ۲ صحیح است

استاد پاسخگو : محسن فضلی www.Pasokh.org

33)
$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}=t \longrightarrow \begin{cases} x=t \longrightarrow dx=dt \\ y=t+1 \longrightarrow dy=dt \\ z=2t-1 \longrightarrow dz=2dt \end{cases}$$

$$\int y\,dx+z\,dy-x\,dz=\int_0^1 (t+1)\,dt+(2t-1)\cancel{x}\,dt \cancel{+} t\times 2\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1+\left[t^2-t\right]_0^1-2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\left[\frac{3}{2}+0-1\right]=\frac{1}{2}$$

$\underline{\underline{2}}$ گزینه

---

34)
$$x^3-y^3=1 \longrightarrow 3x^2-3y^2y'=0 \longrightarrow \boxed{y'=\frac{x^2}{y^2}}$$

$$y''=\frac{2xy^2-2yy'x^2}{y^4}=\frac{2xy^2-2y\times\frac{x^2}{y^2}\times x^2}{y^4}=\frac{2xy^2-2x^4/y}{y^4}$$

$$=\frac{\frac{2xy^3-2x^4}{y}}{y^4}=\frac{2x(y^3-x^3)}{y^5}=\frac{2x(-1)}{y^5}=-\frac{2x}{y^5}$$

$\underline{\underline{3}}$ گزینه

$\underline{\underline{4}}$ گزینه

---

35)
$$L=\int_1^2\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad y'=\frac{x^3}{2}-\frac{(-8x)}{16x^4}$$

$$y'=\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3}$$

$$y'^2=\frac{1}{4}\left[x^6+\frac{1}{x^6}+2\right]$$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{4}x^6+\frac{1}{4x^6}+\frac{1}{2}}=\int_1^2\sqrt{\frac{x^{12}+1+2x^6}{4x^6}}\,dx$$

$$=\int\sqrt{\frac{(x^6+1)^2}{4x^6}}\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^6+1}{2x^3}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1\left(x^3+x^{-3}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2x\ldots}\right.$$

$$=\cancel{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\right.}-\ =\frac{1}{2}\left[4-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{32-1+2-4}{8}\right.$$

$$=\frac{33}{16}$$

WWW.Pasokh.oRg

36 $(D^2+4)y = 3\sin 2x + 2\sinh x$

$$y = \frac{1}{D^2+4}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{\cancel{2}}\right] + \frac{1}{D^2+4}\left[3\sin 2x\right] = \frac{1}{5}\left[e^x - e^{-x}\right] + g(x)$$

$$= \frac{2}{5}\sinh x + g(x)$$ باتوجه به گزینه‌ها، گزینه ۱

$$Ax = \lambda x \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

37 $$\begin{bmatrix} 3 \\ a+b+1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = 3$$

$$a+b+1 = \lambda = 3 \longrightarrow \underline{a+b=2}$$

فقط در گزینه ۱ مجموع a و b برابر 2 است

گزینه ۱

---

38 گزینه ۱

---

39 $y'y'' = 2 \longrightarrow \int y'y'' = 2x + c \longrightarrow \underline{\frac{1}{2}y'^2 = 2x + c}$

$y'(0) = 2 \longrightarrow 2 = c \longrightarrow \underline{c = 2}$

$\frac{1}{2}y'^2 = 2x + 2 \longrightarrow y'^2 = 4x + 4 \longrightarrow y' = 2\sqrt{x+1}$

$y = 2\int\sqrt{x+1}\,dx = 2\times\left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right] + C \longrightarrow y(0) = 1$

$1 = \frac{4}{3} + C \longrightarrow \underline{C = -\frac{1}{3}}$ $\qquad y = \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - \frac{1}{3}$

$y(3) = \frac{4}{3}\times 4\times 2 - \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$ $\qquad$ گزینه ۳

www.Pasokh.org

پاسخگو: مهدی فضلی

(40) $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x = 0$

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0 \\ f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \\ f(2\pi) = \pi^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

چون $f(\pi)f(\frac{\pi}{2})$ پس

تابع دارای یک ریشه در این ناحیه است

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)\sin(-x) - \cos(-x) = f(x)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید تابع زوج است یعنی اگر $f(\alpha)=0$ آنگاه $f(-\alpha)=0$

پس قطعاً تابع دو ریشه دارد. (گزینه ۱ و ۲ حذف می‌شوند)

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \cancel{\sin x} = 2x - x\cos x = x(2-\cos x)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید تابع در فاصله $0 < x < 2\pi$ مشتق نمی‌تواند صفر شود

و طبق تغییر علامت [illegible] در فاصله مذکور نقطه ریشه ۳ و ۴ قرار دارد

---

(41) $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx}$

$$(2xy^2 + 2y)\,dx + (2x^2y + 2x)\,dy = 0$$

$$(2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy) + (2y\,dx + 2x\,dy) = 0$$

$$d(x^2y^2) + 2d(xy) = d(c) \longrightarrow x^2y^2 + 2xy = c$$

گزینه ۱

---

(42) $z = x + iy \rightarrow |(x-1) + iy| + |(x+1) + iy| = 1$

$$(x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 1 \longrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 1 = 0$$

مجموع دو عبارت مثبت همواره مخالف صفر است

گزینه ۴

(44) قطبی گرفتن $\iint (3x^2+3y^2)\,dy\,dx = 3\iint r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$

$$= 3\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a \times \left[\theta\right]_0^{2\pi} \times \frac{1}{4} = \frac{6\pi a^4}{16} = \frac{3\pi}{8}a^4$$

گزینه $\underline{\underline{4}}$

---

(45) $A = \iint dx\,dy$

$$\frac{y}{x^2} = u \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-2xy}{x^4} = \dfrac{-2y}{x^3} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$x = y^2 \longrightarrow \frac{x}{y^2} = v \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-2yx}{y^4} = \dfrac{-2x}{y^3} \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{-2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{1}{y^2} & \dfrac{-2x}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{4}{x^2y^2} - \frac{1}{x^2y^2} = \frac{3}{x^2y^2}$$

$$A = \iint \frac{x^2y^2}{J}\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint \frac{du\,dv}{u^2v^2} = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{u}\right]_1^2\left[\frac{-1}{v}\right]_1^3 = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

گزینه $\underline{\underline{1}}$

---

(47) اگر $x = 0 \longrightarrow$ حاصل سری $= 0$

فقط گزینه $\underline{\underline{2}}$ و $\underline{\underline{4}}$ صدق می‌کند

$$\sum \frac{(-1)^n (n+1) x^{n+1}}{n!} = x\sum \frac{(-1)^n x^n}{n!} - x\sum \frac{(-1)^n n x^n}{n!}$$

$$= \underbrace{x\sum \frac{(-x)^n}{n!}}_{x e^{-x}} - x\sum \frac{n(-1)^n (x)^n}{n!}$$

در گزینه $\underline{\underline{2}}$ این عبارت وجود دارد $\longrightarrow$ گزینه $\underline{\underline{2}}$ صحیح است

www.Pasukh.org

(48) $A = \int_0^1 \frac{e^t}{t+1} \longrightarrow \int_1^2 \frac{e^{-t}}{t-3}\,dt$

$t = -u + 2 \Rightarrow dt = -du$

$\left| \begin{array}{l} t=0 \rightarrow u = 2 \\ t=1 \rightarrow u = 1 \end{array} \right. \rightarrow A = \int_2^1 \frac{e^{-u+2}}{-u+3}(-du) = e^2 \int_2^1 \frac{e^{-u}}{-(u-3)}(-du)$

$A = -e^2 \int_1^2 \frac{e^{-u}}{u-3}\,du \longrightarrow \int_1^2 \frac{e^{-u}}{u-3} = -\frac{A}{e^2} = -Ae^{-2}$

گزینه $\underline{3}$

توجه کنید وقتی حدود انتگرال عوض شود حاصل انتگرال قرینه می شود

---

(49) $\int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{c}{x+1} \right] dx$

$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx - \Big[c\ln(x+1) \Big]_0^\infty$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} tg\,\alpha$

$dx = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+tg^2\alpha)\,d\alpha$

$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+tg^2\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} - c\ln(x+1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\cos\alpha}\,d\alpha - c\ln(x+1)$

حاصل عبارت سمت چپ بشکل $\ln$ ها خواهد بود در برای همگرا شدن انتگرال باید ضرایب $\ln$ ها مساوی شود

$c = \sqrt{2}/2$

گزینه $\underline{4}$

(50) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0 \qquad \sin x \simeq x$

$\lim\left[\frac{3}{x^2}+\frac{a}{x^2}+b\right]=0 \longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a+3+bx^2}{x^2}=0$

$a+3=0 \longrightarrow \underline{a=-3}$

هوپیتال $\lim \frac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}=0$

$\frac{3\cos 3x+a+3bx^2}{3x^2}=\frac{3+a+3bx^2}{3x^2}=0$

$\frac{-9\sin 3x+6bx}{6x}\overset{\text{هوپ}}{=}\frac{-27\cos 3x+6b}{6}=0$

$b=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

گزینه $\underline{\underline{3}}$ جواب است

---

www.Pasokh.org

تدریس خصوصی دروس سیالات و ریاضی ارشد

۰۹۱۲۳۵۷۱۲۰۴ مهندس قصاب